数式処理 *J.JSSAC (2005)*
Vol. 11, No. 3,4, pp. 35 - 42

Noda2005 論文

関孝和の問題を解く

木村 欣司* 平野 照比古† 横山 和弘‡

九大数理 神奈川工大情報 九大数理

概 要

To count real roots in nonlinear simultaneous algebraic equations plays an important role in the cylindrical algebraic decomposition. In this paper, in order to perform old methods and a new method, we discuss a large problem which is introduced in the book "HATSUBISANPOU" written by Japanese famous mathematician Takakazu Seki.

1 はじめに

Cylindrical Algebraic Decomposition を効率よく行うためには，連立代数方程式系の実根の数を数える手法を確立する必要がある．[1] 我々は，関孝和の問題を考えることで実根の数を数える手法の確立を試みる．関孝和の問題を例題とする理由は，その難しさにある．古典的手法としては，分離化元（この問題では変数 f) に対して最小多項式をつくりその多項式に対して Sturm 列を計算するという手法がとられてきた．しかし，変数 f についての最小多項式を構成すると 1458 次式になる．しかもその係数は，10 進 100 桁程度になる．この多項式に対して，誤差なしで Sturm 列を計算することは困難である．そのため浮動少数を両端とする区間数を用いて Sturm 列を計算すればよいと考えられるが，浮動少数では精度が得られないため多倍長数を必要とする．[9] しかも，Sturm 列の計算（ユークリッドの互除法）は不安定であるため [10, pp.196] 多くの桁数を必要とする．この困難の克服をするのことがこの論文の目的である．まず，各変数が図形の長さを表しているという強い制約条件のもとでは数値計算の結果から，Sturm の定理以前の Fourier の定理と Laguerre の定理を用いることで容易に証明できることを示す．しかし，この方法は各変数が図形の長さを表している条件を課さない場合にはもはや適用できない．そこで，我々は新しい手法を採用して条件を課さない場合を解決した．具体的には，高階の導関数を利用する方法である．[8, pp.39-64] 関孝和の問題を通して，この高階の導関数を利用する方法の有効性を検討する．なお，以下の計算は Risa/Asir と各種ライブラリ LAPACK, gmp, pari と C 言語による独自実装によって行った．各内容ごとに実装法を述べることとする．

*kimura@math.kobe-u.ac.jp
†hilano@ic.kanagawa-it.ac.jp
‡yokoyama@math.kyushu-u.ac.jp

2 問題

平山諦著 "関孝和 -その業績と伝記-"[2] の p.62 からは関孝和の著書"発微算法"について解説が書かれている．その平山の本の p.74-75 に以下の問題が紹介されている．

平面に１点を適当にとる． そのとき， 頂点からその１点にむかって線分をひく．

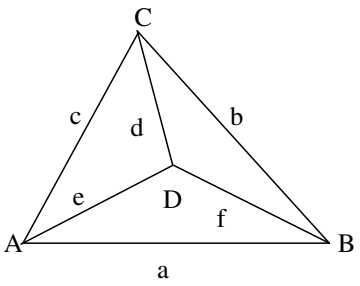

図 1: 問題の説明のための図

それぞれの辺の長さを文字で表す．

そのとき， 以下の関係式が成立することが知られている．

$$\begin{aligned} g_6 \;=\;& a^2d^2(b^2+c^2+e^2+f^2)-a^2d^4-a^4d^2 \\ &+b^2e^2(a^2+c^2+d^2+f^2)-b^2e^4-b^4e^2 \\ &+c^2f^2(a^2+b^2+e^2+d^2)-c^2f^4-c^4f^2 \\ &-a^2b^2c^2-a^2e^2f^2-b^2f^2d^2-c^2d^2e^2=0 \end{aligned} \tag{1}$$

これは， グレブナー基底により定理自動証明できる．

これ以外にも関孝和は以下の条件を課している．

$$g_1 = d^3-b^3-271 \;=\; 0 \tag{2}$$

$$g_2 = b^3-c^3-217 \;=\; 0 \tag{3}$$

$$g_3 = c^3-a^3-60.8 \;=\; 0 \tag{4}$$

$$g_4 = a^3-e^3-326.2 \;=\; 0 \tag{5}$$

$$g_5 = e^3-f^3-61 \;=\; 0 \tag{6}$$

連立代数方程式系（1）-（6）から f のみの式をもとめよ．というのが， "発微算法"の問題である． しかし， この問題設定では現在の数式処理ソフト特に Risa/Asir では容易に計算できる問題である．かつ， 関孝和自身もこの計算を行っている． [3]

そこで， 東京理科大学数学科小松彦三郎教授により新たな問題設定が行われた．**連立代数方程式系（1）-（6）において，** a,b,c,d,e,f **が図形の長さを表しているという条件を課さない場合に実根の数を数えよ．**この問題をこれから議論する．

3 式（1）の定理自動証明

以下の計算は， Risa/Asir によっておこなった．

A, B, C, D の座標を， $A = (0, 0), B = (a, 0), C = (x_1, x_2), D = (x_3, x_4)$ とする．

$$(a - x_1)^2 + x_2^2 = b^2 \tag{7}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = c^2 \tag{8}$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 = d^2 \tag{9}$$

$$x_3^2 + x_4^2 = e^2 \tag{10}$$

$$(a - x_3)^2 + x_4^2 = f^2 \tag{11}$$

イデアル

$$< (a - x_1)^2 + x_2^2 - b^2, x_1^2 + x_2^2 - c^2, (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 - d^2, x_3^2 + x_4^2 - e^2, (a - x_3)^2 + x_4^2 - f^2 >$$

について変数順序

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \succ a \succ b \succ c \succ d \succ e \succ f$$

ブロックオーダー $[[0, 4], [0, 6]]$ のグレブナー基底を計算する．

グレブナー基底は，

$G =$

```
<d^2*a^4+((c^2-d^2-e^2)*b^2+(-d^2-f^2)*c^2+d^4+(-e^2-f^2)*d^2+f^2*e^2)*a^2
+e^2*b^4+((-e^2-f^2)*c^2+(-e^2+f^2)*d^2+e^4-f^2*e^2)*b^2+f^2*c^4+
((e^2-f^2)*d^2-f^2*e^2+f^4)*c^2,...>
```

となる． なお， この計算結果は Risa/Asir の出力をそのまま記載した．グレブナー基底の最初の式は， 式（1）に等しい． （証明終わり）

4 数値解法により根を数値でもとめる

4.1 数式処理における非線形連立代数方程式の数値解法

倍写像行列 [4, pp.131-146] をもちいて数値解をもとめ， 証明に役立てる．

1. 連立代数方程式系（1）-（6）のグレブナー基底を計算する．線形次元を計算する．
2. 連立代数方程式系（1）-（6）において変数 f についての最小多項式を有限体上で計算する．
3. 有限体上の最小多項式 [4, pp.112-117] が無平方であり最小多項式の次数が線形次元と一致していることを確認する．もし， この二つの条件を満たせば変数 f は分離化元である．無平方でないならば， ラディカル化が必要である．次数が線形次元と一致していないならば，他の変数の倍写像行列との重みつき線形和をとらなければならない．
4. 変数 f についての最小多項式は， この二つの条件を満たす．変数 f についての倍写像行列 M_f をつくる．

5. 浮動小数点の演算を用いて， M_f を Householder 変換で上 Hessenberg 行列にし QR 法をもちいて Schur 分解する [5, pp.195-196] と固有値，固有ベクトルが計算できる．
6. 1 つの固有ベクトルに a,b,c,d,e,f の根のセットが 1 つ入っている．

1-4 は Risa/Asir によっておこなう．5-6 は， 数値計算ライブリ LAPACK をもちいる．

4.2 どんな実根が含まれているか?

線形次元が 1458 であることより， 解の総数は複素根を入れると 1458 セット．表 1，2 より，1458 セットのうち実根のみからなると思われるものは以下の 8 セットである．それをこれから証明する．

表 1: a,b,c の数値解

	a	b	c
1	7.6699093899	9.0000069815	8.0000083910
2	−8.3434996159	−6.7167301236	−8.0449830924
3	6.5249883274	8.2209517506	6.9699722396
4	−7.9633556451	−6.1018723982	−7.6303518695
5	−6.6366498987	−2.4412982629	−6.1404069913
6	−6.4471854351	2.1376279160	−5.9173494690
7	2.4215101807	6.6342783292	4.2171358839
8	−4.0706026543	5.9481577345	−1.8783479649

表 2: d,e,f の数値解

	d	e	f
1	10.0000056403	5.0000228360	4.0000357240
2	−3.1755203074	−9.6840474481	−9.8922488039
3	9.3849660984	−3.6441966087	−4.7826268877
4	3.5252631535	−9.4027346786	−9.6268852197
5	6.3533204143	−8.5202974752	−8.7917208129
6	6.5481085313	−8.4071268512	−8.6855710170
7	8.2571431362	−6.7824317103	−7.1984107673
8	7.8373350432	−7.3288043632	−7.6892581789

5 a,b,c,d,e,f に条件を課す場合

a,b,c,d,e,f が図形の長さをあらわしているという条件すなわちすべての変数は非負の実数であるという条件を課す場合の議論をする．

5.1 最小多項式

変数 f についての最小多項式は

$$g_{11} = c_{1458}f^{1458} + c_{1455}f^{1455} + c_{1452}f^{1452} + \cdots$$

と次数が 3 飛ばしになっている． すべての変数が対称に含まれていることも考慮すると，問題を書き換えることができる．

$$a' = a^3, \quad b' = b^3, \quad c' = c^3, \quad d' = d^3, \quad e' = e^3, \quad s = f^3 \tag{12}$$

（$x' = x^3$ は実数上 1 対 1 対応）とすると，

$$d' - b' = 271 \tag{13}$$

$$b' - c' = 217 \tag{14}$$

$$c' - a' = 60.8 \tag{15}$$

$$a' - e' = 326.2 \tag{16}$$

$$e' - s = 61 \tag{17}$$

$$g(s) = c_{1458}s^{486} + c_{1455}s^{485} + c_{1452}s^{484} + \cdots = 0 \tag{18}$$

よって， 式（18）のみを考えればよい．残りの変数は， s に対して線形方程式（13）-（17）を解くことで得られる．

なお， 最小多項式は Risa/Asir 上で構成した．アルゴリズムの詳細は， [4, pp.240,245-249] を参照されたい．

5.2 数値計算からの予想

表 3: a, b, c の非負の実根の数値解

	a	b	c
1	7.6699093899	9.0000069815	8.0000083910

表 4: d, e, f の実根の区間数表現

	d	e	f
1	10.0000056403	5.0000228360	4.0000357240

数値計算の結果の表 3，4 より，非負の実数領域において $64 < s = f^3 \leq 65$ に唯一の根があることを示せばよいと予想される．

5.3 Fourier の定理と Laguerre の定理を $g(s)$ に適用

Fourier の定理 [7, pp.99-100] より， $65 < s$ に根がないことがわかる．$64 < s \leq 65$ の根の個数は 1 つまたはそれより偶数個少ない．よって， 1 つと確定する． さらに， $24 < s \leq 64$ に根がな

いことがわかる．Laguerre の定理 [7, pp.101-102] より， $0 < s < 33$ に根がないことがわかる．さらに， $g(s)$ の定数項が 0 でないことも考慮すると $0 \leq s \leq 64$ に根が存在しないことがわかる．

他の変数は， 上記の結果から線形方程式（13）-（17）で計算する．以上より，すべての変数は非負の実数であるという条件を課す場合実根は 1 つ．

これからは， Risa/Asir 上でおこなった計算の結果に対して定理を適応した．

6 a, b, c, d, e, f に条件を課さない場合

a, b, c, d, e, f が図形の長さをあらわしているという条件すなわちすべての変数の根は正の実数であるという条件を課さない場合の議論をする．

6.1 高階の導関数を利用する方法

数学的事実 [8, pp.39-64]

「与えられた関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の隣り合う実数解の間では $f(x)$ は単調な関数であり， その間には高々 1 つの解しか持たない」

この事実をもちいて real root counting をおこなうのが高階の導関数を利用する方法である．

定理 1

係数が実数の多項式 $f(x)$ に対して， 次のような多項式列

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$$

をつくる．

1. $f_1(x) = \dfrac{f(x)}{\gcd(f(x), f'(x))}$ とおく．
2. $f_j(x)$ まで定義されていて $f_j(x)$ の次数が 1 より大きいときは $f_{j+1}(x) = \dfrac{f_j'(x)}{\gcd(f_j'(x), f_j''(x))}$ とおく．
3. $f_{j+1}(x)$ の次数が 1 より大きいときは前の操作をくり返す．

この多項式列は次の条件を満たす．

- すべての $f_j(x)$ は重複因子を持たない． $f_1(x)$ と $f(x)$ は同じ解を持つ．
- $f_j(x)$ と $f_{j+1}(x)$ は共通解を持たない．
- $j = 1, 2, \ldots, k-1$ に対して， α, β を隣り合う $f_{j+1}(x)$ の解とする． $f_j(x)$ は区間 (α, β) に高々 1 つの解しか持たない．もしこの区間に $f_j(x)$ が解を持てば $f_j(\alpha)$ と $f_j(\beta)$ は符号が異なる．

根の多重度は別途決定できるが， この問題では $\gcd(g(s), g'(s)) = 1$ であるためそのような議論はここではしない．詳しくは， [8, pp.39-64] を参照していただきたい．

6.2 結果

表 5: $g(s)$ の実根の区間数表現

	s
1	[[640017148584, 10], [640017148585, 10]]
2	[[−9680216914656, 10], [−9680216914655, 10]]
3	[[−1093955121813, 10], [−1093955121812, 10]]
4	[[−8921900976700, 10], [−8921900976699, 10]]
5	[[−6795503392712, 10], [−6795503392711, 10]]
6	[[−6552320519219, 10], [−6552320519218, 10]]
7	[[−3730008868846, 10], [−3730008868845, 10]]
8	[[−4546250322124, 10], [−4546250322123, 10]]

高階の導関数を利用する方法をもちいて $g(s)$ の実根を区間数で包み込むと，表 5 のようになる．表 5 における 10 は，$\times 10^{-10}$ を意味する．以上より， 連立代数方程式系（1）-（6）の実根の個数は 8 つ．これらの計算は多倍長数のために pari をもちいて C 言語による独自実装によっておこなった．

6.3 元の変数へ変換

参考までに， $g(s)$ の実根の区間数の結果を変数 a, b, c, d, e, f で書き直すと表 6，7 のようになる．表 6，7 において 4 は $\times 10^{-4}$ を意味する．この計算は interval arithmetic を可能にした Risa/Asir 上でおこなった．

表 6: a, b, c の実根の区間数表現

	a	b	c
1	[[76699, 4], [76700, 4]]	[[90000, 4], [90001, 4]]	[[80000, 4], [80001, 4]]
2	[[−83435, 4], [−83434, 4]]	[[−67168, 4], [−67167, 4]]	[[−80416, 4], [−80415, 4]]
3	[[65249, 4], [65250, 4]]	[[82209, 4], [82210, 4]]	[[69699, 4], [69700, 4]]
4	[[−79634, 4], [−79633, 4]]	[[−61019, 4], [−61018, 4]]	[[−76300, 4], [−76299, 4]]
5	[[−66370, 4], [−66369, 4]]	[[−24414, 4], [−24413, 4]]	[[−61407, 4], [−61406, 4]]
6	[[−64476, 4], [−64475, 4]]	[[21376, 4], [21377, 4]]	[[−59177, 4], [−59176, 4]]
7	[[24215, 4], [24216, 4]]	[[66342, 4], [66343, 4]]	[[42171, 4], [42172, 4]]
8	[[−40702, 4], [−40701, 4]]	[[59474, 4], [59475, 4]]	[[−18782, 4], [−18781, 4]]

参 考 文 献

[1] George E. Collins, H. Hong: Partial Cylindrical Algebraic Decomposition for Quantifier Elimination, J. Symb. Comput, **12(3)**, 1991, pp. 299-328.

[2] 平山諦: 関孝和 その業績と伝記， 恒星社版， 東京，1974.

[3] 広田良吾: 行列式とパフィアン（1），日本応用数理学会誌「応用数理」， **14(1)**， 2004， pp. 62-66.

表 7: d, e, f の実根の区間数表現

	d	e	f
1	[[100000, 4], [100001, 4]]	[[50000, 4], [50001, 4]]	[[40000, 4], [40001, 4]]
2	[[−31756, 4], [−31755, 4]]	[[−96800, 4], [−96799, 4]]	[[−98923, 4], [−98922, 4]]
3	[[93849, 4], [93850, 4]]	[[−36442, 4], [−36441, 4]]	[[−47827, 4], [−47826, 4]]
4	[[35252, 4], [35253, 4]]	[[−94023, 4], [−94022, 4]]	[[−96269, 4], [−96268, 4]]
5	[[63533, 4], [63534, 4]]	[[−85204, 4], [−85203, 4]]	[[−87918, 4], [−87917, 4]]
6	[[65481, 4], [65482, 4]]	[[−84073, 4], [−84072, 4]]	[[−86856, 4], [−86855, 4]]
7	[[82572, 4], [82573, 4]]	[[−67825, 4], [−67824, 4]]	[[−71985, 4], [−71984, 4]]
8	[[78372, 4], [78373, 4]]	[[−73288, 4], [−73287, 4]]	[[−76893, 4], [−76892, 4]]

[4] 野呂正行, 横山和弘: グレブナー基底の計算 基礎篇, 東京大学出版会, 東京, 2003.

[5] 櫻井鉄也: MATLAB/Scilab で理解する数値計算, 東京大学出版会, 東京, 2003.

[6] David Cox,Donal O ’ Shea,John Little: グレブナー基底 1 代数幾何と可換代数におけるグレブナー基底の有効性（大杉 英史, 日比 孝之, 北村 知徳 訳), シュプリンガー・フェアラーク東京, 東京, 2000.

[7] 高木貞治: 代数学講義（改訂新版), 共立出版, 東京, 1965.

[8] 齋藤友克, 竹島卓, 平野照比古: グレブナー基底の計算 実践篇, 東京大学出版会, 東京, 2003.

[9] 牛暁明, 櫻井鉄也: 固有値解法による代数方程式の重根をもとめる方法, 日本応用数理学会論文誌, **13(3)**, 2003, pp. 447-460.

[10] 中村佳正: 可積分系の応用数理, 裳華房, 東京, 2000.